

# 基于小波模极大值和 Neyman-Pearson 准则阈值的图像去噪

李旭超 朱善安

(浙江大学电气工程学院, 杭州 310027)

**摘要** 首先给出了2维噪声的小波变换特性,分析图像小波变换模的极大值与小波分解级数 $j$ 和李氏指数之间的关系,指出如何确定和保护图像的边缘;接着阐述了基于软、硬阈值的图像正交小波变换去噪法,然后提出一种基于Neyman-Pearson准则的小波阈值的确定,从而又提出了一种基于小波模极大值和Neyman-Pearson准则阈值的图像去噪方法,解决了图像去噪和保护图像边缘这个“两难”问题。针对期望图像叠加了不规则噪声的假设,对几种去噪方法做了定性比较,并给出了去噪性能的定量分析,仿真结果表明,此方法能提高去噪后图像的信噪比,使评价原图像与去噪后的图像近似程度的方差和相对熵为最小,同时能很好地保留原始图像的边缘信息。

**关键词** 小波阈值去噪 Neyman-Pearson 准则 小波模极大值 图像的边缘

**中图分类号:** TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2005)08-0964-06

## Image Denoising Based on Wavelet Modulus Maxima and Neyman-Pearson Principle Threshold

LI Xu-chao, ZHU Shan-an

(Electrical Engineering College, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

**Abstract** Firstly, this paper gives the property of wavelet transform of two dimensional noise, analyzes the relationship of wavelet transform modulus maxima to different decomposed class  $j$  and Lipschitz exponent, and points out how to determine and protect image edges. Then it explains the orthogonal wavelet transform of denoising based on soft and hard threshold, and puts forward a denoising method based on the wavelet modulus maxima and Neyman-Pearson principle. The method finds the optimal trade off between image denoising and protecting image edges. Based on the assumption that the observed image is the sum of the expected image and irregular corruptive noise, the qualitative and quantitative performance of our image denoising method is compared with others. Simulation results show the proposed method can efficiently denoise, such as increasing Signal-to-Noise Ratio (SNR), lowering Mean Square Error (MSE) and Relative Entropy (RE), while preserving the details of the original image.

**Keywords** wavelet threshold denoising, Neyman-Pearson principle, wavelet modulus maxima, image edge

### 1 引言

图像在采集、转换和传输中,常常受到成像设备与外部环境噪声的干扰而降质。图像去噪是图像处理的常用技术,经典的图像去噪方法从本质上来说,是低通滤波的方法,低通滤波器在有效消除噪声的同时,也会使图像的边缘信息模糊。因此各种图

像去噪方法,其实就是要解决去噪和保留图像高频边缘信息这个“两难”问题。

近年来,兴起的小波理论为信号的去噪提供了强有力的工具,克服了传统方法处理非平稳信号时存在的局限性<sup>[1]</sup>。小波变换具有良好的时频分析特性,根据图像与噪声在不同尺度上的不同特征,选取不同的阈值来对图像进行去噪。1992年,Donoho和Johnstone提出小波阈值萎缩方法并给出了通用

收稿日期:2004-08-30;改回日期:2005-01-04

第一作者简介:李旭超(1974~),男,2003年于辽宁工程技术大学获电力电子与电力传动专业硕士学位,现为浙江大学电气工程学院博士研究生。主要研究方向为小波理论与数字图像处理等。E-mail:lixuchaoliaoning@sina.com

阈值<sup>[2]</sup>,由于有很严重的“过扼杀”小波系数的倾向,因而去噪后图像的效果并不理想。因此许多学者对阈值和阈值函数的选取进行了广泛的研究<sup>[3,4]</sup>。但是,同样受到去噪和保留有用高频信息边缘的困扰。目前,人们的研究方向已转到小波系数的结构可以用随机过程描述,如多尺度隐马尔可夫随机场模型<sup>[5]</sup>(也称为先验模型),但是,如何最大限度地获取图像的先验信息,并用这些信息来确定更合适的阈值,以达到更高的去噪效果仍然是个难点,同时算法的复杂度增加。

边缘是图像最基本的特征,包含了用于识别的有用信息,为人们描述或识别目标以及解释图像提供了一个有价值 and 重要的特征参数。图像信息量巨大,而边缘信息是图像的一种紧描述,所包含的往往是图像中最重要的信息,在计算机视觉处理中有着重要的作用。因此,在进行图像处理时,要解决去噪和保留边缘这个“两难”问题。

基于小波模极大值和 Neyman-Pearson 准则<sup>[6]</sup>的阈值去噪方法,在阈值去噪前,先通过小波变换模的极大值确定图像相应的边缘点在各子带的位置,而在这些位置上的小波系数将不受到阈值去噪的影响。该方法根据小波系数的特性,在一定的虚警概率条件下,利用 Neyman-Pearson 准则使得噪声的检测概率最大来确定不同分解级不同子带的阈值,从而实现对图像进行去噪。由于提前保护了图像的边缘,所以巧妙地解决了去噪与保留边缘这个“两难”问题。对几种去噪方法做了定性比较,并给出去噪性能定量评价,仿真结果表明,基于小波模极大值和 Neyman-Pearson 阈值的图像去噪法,从定性地看,图像的边缘信息丢失相对较少;从定量地看,去噪后图像的 SNR 较高, MSE 和 RE 较小,说明了该方法的有效性和优异性。

## 2 2 维噪声的小波变换特性和李氏指数

### 2.1 2 维噪声的小波变换特性

定义 1 若满足

$$W_s f(x, y) = f * \psi_s(x, y) = 1/s^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(a, b) \times \psi((x-a)/s, (y-b)/s) da db \quad (1)$$

式中,  $f \in L^2(\mathbf{R}^2)$ ,  $\psi_s(x, y) = 1/s^2 \psi(x/s, y/s)$ ,  $L^2(\mathbf{R}^2)$  表示平方可积的平面空间,即能量有限的信号空间,则称  $W_s f(x, y)$  为  $f(x, y)$  的小波变换。

当尺度  $s = 2^j (1 \leq j \leq J)$  时,则称下式为二进小波变换:

$$W_j f(x, y) = W_{2^j} f(x, y) = f * \psi_{2^j}(x, y) \quad (2)$$

定理 1 若  $N(x, y)$  为零均值的高斯白噪声  $N(0, \sigma^2)$ , 其中  $\sigma^2$  为方差, 记为  $N(x, y) \sim N(0, \sigma^2)$ , 则

$$W_j N(x, y) \sim N(0, \|\psi\|^2 \sigma^2 / s^2) \quad (3)$$

证明 因为小波变换为线性变换, 所以高斯信号  $N(x, y)$  的小波变换系数  $W_j N(x, y)$  仍服从高斯分布, 对  $W_j N(x, y)$  求数学期望为

$$E(W_j N(x, y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(N(a, b)) \times \psi_s(x-a, y-b) da db = 0 \quad (4)$$

对  $W_j N(x, y)$  求方差得

$$E(|W_j N(x, y)|^2) = E\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} N(a, b) \times N(a', b') \psi_s(x-a, y-b) \times \psi_s(x-a', y-b') da db da' db'\right) \quad (5)$$

又因为  $N(x, y)$  为白噪声, 对  $N(x, y)$  求自相关得

$$E(N(a, b)N(a', b')) = \sigma^2 \delta(a-a', b-b') \quad (6)$$

式中,  $\delta(\cdot, \cdot)$  为脉冲函数。将式(6)代入式(5)有:

$$E(|W_j N(x, y)|^2) = \|\psi\|^2 \sigma^2 / s^2 \quad (7)$$

所以  $W_j N(x, y) \sim N(0, \|\psi\|^2 \sigma^2 / s^2)$ 。证毕。

对于正交小波变换,  $\|\psi\|^2 = 1$ , 则

$$W_j N(x, y) \sim N(0, \sigma^2 / s^2) \quad (8)$$

即零均值高斯白噪声的正交小波变换仍为零均值的高斯噪声, 且方差  $\sigma^2$  与尺度的平方成反比。

### 2.2 小波变换模的极大值和李氏指数的关系

图像去噪要解决边缘的模糊问题, 首先必须将边缘在去噪前定位, 以便在去噪时对这些边缘点有所回避。边缘是图像对视觉的最主要特征, 在计算机视觉中提出了许多的边缘检测算法, 为了同下文去噪时采用的 Neyman-Pearson 准则的小波阈值去噪法相适应, 本文采用具有检测局域突变能力的小波变换作为图像边缘检测工具。其优点是可以结合多尺度特征来进行边缘提取。由于边缘是信号变化率最大之处(也就是转折点), 因此可以采用平滑函数  $\theta(x, y)$  的一阶偏导数作为小波函数:

$$\psi_s^{(1)}(x, y) = \frac{\partial \theta_s(x, y)}{\partial x}, \psi_s^{(2)}(x, y) = \frac{\partial \theta_s(x, y)}{\partial y} \quad (9)$$

由式(1), 图像  $f(x, y)$  的小波变换可写成如下形式:

$$\begin{bmatrix} W_s^{(1)} f(x, y) \\ W_s^{(2)} f(x, y) \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (f * \theta_s)(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} (f * \theta_s)(x, y) \end{bmatrix} \quad (10)$$

式(10)中,图像 $f(x, y)$ 经过平滑后,沿 $x$ 和 $y$ 方向的偏导数就是图像灰度沿 $(x, y)$ 方向的梯度。其模值是:

$M_s f(x, y) = \sqrt{|W_s^{(1)} f(x, y)|^2 + |W_s^{(2)} f(x, y)|^2}$  (11)  
其幅角(与 $x$ 轴方向的夹角)是:

$$A_s f(x, y) = \arctan W_s^{(2)} f(x, y) / W_s^{(1)} f(x, y) \quad (12)$$

因此,图像的边缘定义为式(11)取极值之处,其方向沿与式(12)垂直的方向。在灰度图像中,灰度的变化通常不是孤立的点,而是一条曲线。小波模的极大值能反映图像灰度的变化,这些模的极大值点很可能就是图像的边缘点。小波变换模极大值的幅度以及在不同尺度的变化可表征出信号的局部奇异性。在数学上,李氏指数是表示函数局部特性的一种度量。为了确定模的极值点是否是真正的边缘点,引出如下的定义和定理:

**定义 2** 函数 $f(x, y)$ 在 $(x_0, y_0)$ 处具有点态的 Lipschitz 指数 $\alpha$ ,当且仅当存在一个常数 $k$ 对所有 $(x_0, y_0)$ 和 $(x_0 + h, y_0 + h')$ 在开集 $\Omega$ 上,使得 $|f(x_0, y_0) - p_n(x_0 + h, y_0 + h')| \leq k |h^2 + h'^2|^{\alpha/2}$  (13)  
则称 $f(x, y)$ 在 $(x_0, y_0)$ 处的李氏指数为 $\alpha$ 。式中, $h, h'$ 是一个充分小的量, $p_n(x, y)$ 是过 $f(x_0, y_0)$ 点的 $n$ 次多项式( $n \in \mathbf{Z}$ )。

**定理 2<sup>[7]</sup>** 函数 $f(x, y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 的整个开集 $\Omega$ 具有均匀 Lipschitz 指数 $\alpha$ ,当且仅当存在一个常数 $k$ ,使得开集 $\Omega$ 上的所有点 $(x, y)$ 满足

$$M_s f(x, y) \leq ks^\alpha \quad (14)$$

式中 $s$ 为小波变换的尺度。

当 $s = 2^j$ 时,对式(14)两边取对数则有

$$\log_2 M_s f(x, y) \leq \log_2 k + \alpha j \quad (15)$$

白噪声的 Lipschitz 指数 $\alpha < 0$ <sup>[8]</sup>,根据式(15),其对应的模极大值随尺度 $j$ 的增大而减小(因此其主要对小尺度下的模极大值影响较大),从而也验证了式(15)和式(8)相吻合。而一般信号的突变点(图像的边缘)的 Lipschitz 指数大于等于 0,这种突变点所对应的小波变换模极大值随着尺度 $j$ 的增加幅度减小缓慢;而对噪声,小波模值减小较快,依据此区别,可以去掉模极大值图上那些随尺度增大而幅度减小较快的极值点(对应噪声的极值点),从而去除掉由噪声引起的伪边缘点,而保留幅度随尺度增加而缓慢减小的极值点(对应边缘点的位置),这样就可以在模极大

值图上达到去噪和保护边缘的目的。

### 3 基于小波变换模极值和阈值的图像去噪

令 $Y(x, y) = f(x, y) + N(x, y)$ ,其中 $f(x, y)$ 为期望得到的图像, $Y(x, y)$ 为被高斯白噪声 $N(x, y)$ 污染的图像。噪声 $N(x, y)$ 为独立同分布的高斯白噪声,均值为零,方差为 $\sigma^2$ ,记为: $N(x, y) \sim N(0, \sigma^2)$ 。基于小波变换模极值和阈值的图像去噪步骤如下:

(1) 边界的处理 图像信号是有限长度的,经过小波变换后,得到的数据点数将大于原始数据,从而引起边界的外延,故需妥善处理边界问题,通常使用的是周期延拓法和对称延拓法。周期延拓法会在图像的边界引起严重的不连续,而对称延拓法则可获得较为平滑的图像边界。因此这里采用后一种方法来处理图像的边界问题。

(2) 小波基的选择<sup>[9]</sup> 对一般较为平滑的图像,经过小波分解后,低频分量较大,高频分量较小,且小波基正则性阶数越高,低频分量越大,高频分量越小,因为是去除噪声,故选择正则性较好的小波基。

(3) 边缘点的确定<sup>[10]</sup> 根据式(10),首先对图像进行小波变换,找出 $W_s^{(1)} Y(x, y)$ 每列的零交叉点,并标记相邻零交叉点间的极大值点。一般情况下,如果在尺度 $2^j$ 上有一个具有较大幅度的模极大值,并且它的位置接近与在 $2^{j+1}$ 尺度上具有相同符号的模极大值的位置,则可以判断这两个极值点是对应于同一突变点的。根据式(15)去除那些空间位置相同,但幅度随分解级 $j$ 增大反而明显减小的极值点,这些极值点往往是由噪声引起的,则重新进行标记在列方向上的极值点。同理标记在行方向上的极值点。根据式(11)计算极值点的幅值,根据式(12)将沿梯度垂直方向的相邻近的极值点串接,便得到图像的边缘。

(4) 设置阈值<sup>[11]</sup> 阈值的选取尤为重要,如果选的太小,则去除不了噪声;如果选的太大,又会把图像的细节去除过多,影响图像的恢复质量。阈值的选取方法主要有:①默认阈值,如利用`ddencmp`函数产生信号的默认阈值,然后利用`wdencomp`函数进行消噪处理;②全局阈值,如利用由 Donohon 给出的经验公式 $T = \alpha \sqrt{2 \ln N}$ 和经过调整的 VisuS-hink 全局阈值 $T = \eta \alpha \sqrt{2 \ln N}$ ( $\eta$ 是修正因子);③自适应阈值,如 Wiener2 函数利用各像素局部邻域的均值和方差来设置阈值。前两种方法是简单而适用的阈值

估计方法,但去噪效果比较粗糙;在后一种方法中,阈值的大小依赖于窗口的大小。阈值的选取分软阈值或硬阈值处理,对每一层小波系数进行相应的阈值设置。硬阈值是指对绝对值大于或等于  $T$  的小波系数予以保留,其他作为噪声的小波系数,将其置为零,可用如下形式表示:

$$W\hat{Y}(x,y) = \begin{cases} WY(x,y) & |WY(x,y)| \geq T \\ 0 & |WY(x,y)| < T \end{cases} \quad (16)$$

软阈值是指对绝对值大于或等于  $T$  的小波系数不是简单地予以保留,而是将其收缩置零,可用如下形式表示:

$$W\hat{Y}(x,y) = \begin{cases} \text{当 } |WY(x,y)| \geq T \text{ 时} \\ \text{sgn}(WY(x,y))(WY(x,y) - T) \\ \text{当 } |WY(x,y)| < T \text{ 时} \\ 0 \end{cases} \quad (17)$$

式中,  $\text{sgn}(\cdot)$  表示符号函数。

(5) 图像重建 对处理后的数据作小波逆变换,得到重构的图像  $\hat{f}(x,y)$ 。

#### 4 基于 Neyman-Pearson 准则的小波系数阈值的确定

用  $H_0$  表示图像  $Y(x,y)$  小波变换系数  $Wf(x,y)$  不存在,即只存在噪声  $WN(x,y)$  的系数。用  $H_1$  表示观测图像  $Y(x,y)$  经小波变换后,期望图像的小波系数  $Wf(x,y)$  和  $WN(x,y)$  共同存在。用  $\rho_{H_0}(w)$  表示  $H_0$  为真时(仅有噪声)的概率密度函数;  $\rho_{H_1}(w)$  表示  $H_1$  为真时的概率密度函数。则似然比为

$T(w) = \rho_{H_0}(w) / \rho_{H_1}(w)$ ,  $T(w)$  为检测阈值,当  $T(w) \geq t_0$  时,  $H_0$  为真;当  $T(w) < t_0$  时,  $H_1$  为真。当原假设  $H_0$  为真时,噪声的小波变换系数被认为是信号的小波变换系数,从而拒绝了原假设  $H_0$ ,这种错误称为第 1 类错误。当原假设  $H_0$  成立时,样本的小波系数被认为是噪声的小波变换系数,从而没有拒绝  $H_0$ ,这种错误称为第 2 类错误。选择使何种类型的错误最小,由具体感兴趣的对象来确定。由于本文的目的是去除噪声,故感兴趣的对象是去除图像的噪声,故应使犯第 1 类的错误尽可能地小,即为了尽量将噪声去除,使得噪声的检测概率最大,则在给定虚警概率的条件下,选择相应的阈值  $t$ ,根据定理 1 可知  $\rho_{H_0}(w)$  的概率密度函数,由 Neyman-Pearson 准则,则有:

$$2 \int_{t_0}^{+\infty} \rho_{H_0}(w) dw = 2 \int_{t_0}^{+\infty} \frac{s}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx = \beta \quad (18)$$

解得  $t = u_{\beta/2} \sigma / s$ , 式中  $u_{\beta/2}$  为标准正态分布关于  $\frac{\beta}{2}$  的上侧分位数。基于 Neyman-Pearson 准则的阈值选取是在给定虚警概率  $\beta \in (1 \sim 10^{-6})$  的情况下,使检测概率最大,从而得到相应的阈值  $t_0$ 。

#### 5 仿真实例与分析

对加有零均值高斯噪声的 Lena 图像分别采用 4 种不同的方法进行去噪实验,实验结果如图 1、图 2 所示。



图 1 用 4 种方法去噪后的 Lena 图像 ( $\sigma^2 = 0.01$ )

Fig. 1 The results of four denoising methods

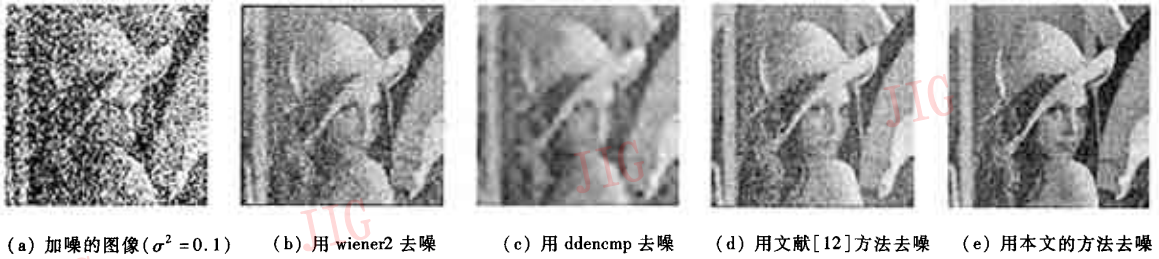


图 2 用 4 种方法去噪后的 Lena 图像 ( $\sigma^2 = 0.1$ )

Fig. 2 The results of four denoising methods

这 4 种方法分别是:用 wiener2 进行去噪;用基于熵标准的 ddenomp 选定小波系数阈值进行去噪;用 Donohon 提出的小波系数阈值进行去噪<sup>[12]</sup>;用本文提出的方法进行去噪。噪声的方差分别为 0.01, 0.1。

为了客观、定量地评价几种图像去噪方法的效果,采用以下评价参量:

(1) 均方根误差

$$MSE = \sqrt{\sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^N (f_{ki} - \hat{f}_{ki})^2 / MN} \quad (19)$$

式中,  $f$  为原始图像,  $\hat{f}$  为去噪后的图像,  $M, N$  分别为图像的行数与列数。均方根误差越小,说明去噪效果越好。

(2) 信噪比

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{var(f_{ki})}{(MSE)^2} \quad (20)$$

式中,  $var(f_{ki})$  为原始图像的方差。信噪比较高,说明去噪效果和质量较好。

(3) 相对熵

相对熵亦称交叉熵或概率分布的散度,是用来度量两幅图像间的差异:

$$RE = \sum_{i=0}^{L-1} p_i \log \frac{p_i}{\hat{p}_i} \quad (21)$$

式中, RE 为图像的相对熵,  $L$  为图像的总的灰度数,  $p_i$  表示原始图像灰度值为  $i$  的像素数  $n_i$  与图像总像素数之比;  $\hat{p}_i$  表示去噪后的图像灰度值为  $i$  的像素数  $\hat{n}_i$  与图像总像素数之比。相对熵越小,说明去噪后的图像与原始图像间的差异越小,即去噪效果越好。

定性地看图 1 和图 2 的去噪效果,用 wiener2 和 ddenomp 去噪使图像细节失去的较多,图像模糊。这是由于 ddenomp 是用熵标准选定小波系数的阈值,当小波系数的大小以等概率出现时选取的阈值最优, Lena 图像小波系数的大小不可能等概率出现,故选取的阈值不是最优的,从而使图像的细节失去较多。

用 wiener2 进行去噪的图像,图像细节丢失严重,图像细节模糊,这是由于平滑窗口大小造成的,说明 wiener2 去噪性能有限。用 Donhon 提出的小波系数阈值进行去噪,细节丢失相对较少。用本文的方法对图像进行去噪,首先保护图像的边缘,然后利用 Neyman-Pearson 准则选取的阈值进行去噪,去噪后细节丢失更少,优于其他 3 种去噪方法,但仍有边缘的丢失,这是由于在确定边缘时没有将所有的边缘检测出来,仍有一部分模极值漏检,使得进行去噪时,这些漏检的边缘没有得到保护,从而导致丢失。

定量地看去噪效果,从空间距离的角度来说,以水平方向灰度级数作为  $x$  轴,以垂直方向灰度数作为  $y$  轴,那么图像灰度作为  $z$  轴形成一空间曲面, MSE 越小,说明去噪后的图像同原图像越接近重合。从概率的角度上来说, RE 越小说明去噪后的图像以概率 1 趋于原图像。从表 1 可知,本文方法的 MSE 和 RE 最小,说明去噪后的图像同原图像最接近。在  $\sigma^2 = 0.01$  时,用 ddenomp 去噪后的 MSE 和 RE 较大,说明去噪后的图像同原图像接近程度较差,这从视觉效果看上去相当明显。从去噪后的 SNR 上看,本文的方法信噪比最高,用 ddenomp 去噪后的 SNR 较低。

表 1 4 种方法的性能比较

Tab. 1 Performance comparison of four methods

$\sigma^2$		wiener2	ddenomp	文献[12]的方法	本文方法
0.01	MSE	12.03	19.206	11.83	11.73
	SNR	12.67	7.9652	12.83	12.86
	RE	0.035	0.0865	0.031	0.029
0.1	MSE	31.14	24.660	31.06	24.03
	SNR	4.126	4.2827	4.147	4.730
	RE	0.126	0.4437	0.122	0.118

本文的主要计算量是检测图像的边缘和图像的小波变换与逆变换,其中小波变换和逆变换的计算具有线性复杂度,而进行图像的边缘检测过程主要

是一阶差分,因此计算量也是线性的,线性复杂度为  $O(MN)$ ,其中, $MN$  为像素的个数。

## 6 结 论

(1) 小波模极大值和 Neyman-Pearson 准则阈值的图像去噪法,在进行阈值去噪前,首先进行图像边缘点的确定,然后进行去噪。去噪和边缘提取是计算机视觉的“两难”问题,为了去噪时不使图像的的边缘模糊,本文实行分而治之。

(2) 在进行图像去噪时,阈值的选取很重要。在阈值的选取方面,文中分析了 2 维噪声的小波变换特性,证明 2 维高斯噪声的小波系数仍服从高斯分布。在一定的虚警概率条件下,使得噪声的检测概率最大,根据 Neyman-Pearson 准则,利用噪声小波系数的密度函数确定阈值。在边缘保护方面,利用小波多尺度特性,分析了小波模极大值点和李氏指数与分解级之间的关系,由此来确定极值点,去除伪边缘点,以便在阈值去噪时,对边缘点有所回避。

(3) 从定性与定量的角度来看去噪效果,本文方法在某种程度上解决了去噪和保留图像高频边缘信息这个“两难”问题。

### 参考文献 (References)

1 Daubechies I. Ten lectures on wavelets [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992: 1 ~ 56.

2 Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage [J]. *Biometrika*, 1994, 81(3): 425 ~ 455.

3 Shark L K, Yu C. Denoising by optimal fuzzy thresholding in wavelet domain [J]. *Electronics Letters*, 2000, 36(6): 581 ~ 582.

4 Jansen M, Bultheel A. Multiple wavelet threshold estimation by generalized cross validation for images with correlated noise [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1999, 8(7): 947 ~ 953.

5 Liu Juan, Moulin P. Image denoising based on scale-space mixture modeling of wavelet coefficients [A]. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing [C]*, Kobe Japan, 1999: 386 ~ 390.

6 Scharf L L. *Statistical Signal Processing: Detection, Estimation and Time Series Analysis [M]*. New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1991: 104 ~ 178.

7 Meyer Y. *Ondelettes et Operateurs [M]*. Paris: Hermann Press, 1990.

8 Mallat Stephane, Zhong Sifen. Characterization of signals from multiscales edges [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1992, 14(7): 710 ~ 732.

9 Donoho D L, Johnstone I M, Kerkyacharian G, et al. Wavelet shrinkage: Asymptopia? [J]. *Journal Royal Statistical Society*, 1995, serial B(57): 301 ~ 369.

10 Mallat Stephane, Hwang Wei Ling. Singularity detection and processing with wavelets [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1992, 38(2): 617 ~ 643.

11 Cohen A, Daubechies I, Feauveau J C. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets [J]. *Communications on Pure and Mathematics*, 1992, 45(5): 485 ~ 560.

12 David L. Donoho. De-Noising by soft-Thresholding [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1995, 41(3): 613 ~ 627.